

# Wymagania edukacyjne z matematyki

## – klasa 4 technikum –

### poziom rozszerzony

#### 1. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

Uczeń:

- zaznacza kąt w układzie współrzędnych
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu
- określa znaki wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych szczególnych kątów, np.:  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$ , korzystając z definicji dowolnego kąta  $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$
- określa położenie końcowego ramienia kąta na podstawie informacji o wartościach funkcji trygonometrycznych tego kąta
- oblicza wartości, w których występują funkcje trygonometryczne kątów należących do przedziału  $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$
- zaznacza w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego danego kąta  $\alpha$
- zapisuje miarę danego kąta w postaci  $k \cdot 360^\circ + \alpha$ ,  $k \in \mathbf{Z}$
- wyznacza kąt, gdy dany jest punkt należący do jego końcowego ramienia
- bada, czy punkt należy do końcowego ramienia danego kąta
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest jego miara stopniowa
- wyznacza kąt w podanym przedziale, gdy dana jest wartość jednej jego funkcji trygonometrycznej
- określa miarę kąta na podstawie informacji podanych w zadaniu
- zamienia miarę stopniową na miarę łukową i odwrotnie
- zapisuje miarę łukową danego kąta w postaci  $2k\pi + \alpha$ ,  $k \in \mathbf{Z}$
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów o danej mierze łukowej
- odczytuje okres podstawowy funkcji z jej wykresu
- szkicuje wykres funkcji okresowej
- stosuje okresowość funkcji do wyznaczania jej wartości
- szkicuje wykresy funkcji sinus i cosinus w danym przedziale
- określa własności funkcji sinus i cosinus w danym przedziale
- odczytuje z wykresów funkcji sinus i cosinus argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość
- korzystając z wykresów funkcji sinus i cosinus podaje liczbę rozwiązań równania  $\sin x = m$ ,  $\cos x = m$  w zależności od parametru  $m$
- szkicuje wykresy funkcji tangens i cotangens w danym przedziale
- określa własności funkcji tangens i cotangens w danym przedziale
- odczytuje z wykresów funkcji tangens i cotangens rozwiązania równania  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$  w podanym przedziale
- szkicuje wykres funkcji  $y = f(x - p) + q$ , gdzie  $f$  jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności
- szkicuje wykres funkcji, stosując symetrię względem osi OX
- szkicuje wykres funkcji będącej złożeniem przesunięcia i symetrii względem osi OX
- podaje zbiory wartości funkcji, np.  $f(x) = 2 \cos^2 x - 1$
- podaje amplitudę wykresu funkcji  $y = af(x)$ , gdzie  $f$  jest funkcją trygonometryczną
- szkicuje wykres funkcji  $y = af(x)$ , gdzie  $f$  jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności

- szkicuje wykres funkcji  $y = af(x - p) + q$ , gdzie  $f$  jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności
- szkicuje wykres funkcji  $y = af(x)$ , gdzie  $f$  jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności
- szkicuje wykresy funkcji będących złożeniem kilku przekształceń i określa ich własności
- szkicuje wykresy funkcji  $y = |f(x)|$  oraz  $y = f(|x|)$ , gdzie  $f$  jest funkcją trygonometryczną, i określa ich własności
- szkicuje wykresy funkcji trygonometrycznych będących złożeniem kilku przekształceń i określa ich własności
- stosuje wykresy funkcji w zadaniach różnych typów
- stosuje podstawowe tożsamości trygonometryczne w prostych sytuacjach
- dowodzi tożsamości trygonometrycznych, podając odpowiednie założenia
- oblicza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich
- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych kątów z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów
- stosuje wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta
- wykorzystuje wzory na funkcje trygonometryczne kąta podwojonego do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych połowy kąta
- stosuje poznane wzory do przekształcania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne, w tym do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych
- wyznacza zbiór wartości funkcji, stosując wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów
- wyprowadza wzory na funkcje trygonometryczne kąta podwojonego i funkcje trygonometryczne połowy kąta
- zapisuje dany kąt w postaci  $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$  lub  $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$ , gdzie  $k \in \mathbf{Z}$
- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów z zastosowaniem wzorów redukcyjnych (także z wykorzystaniem tablic wartości trygonometrycznych lub kalkulatora)
- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów z zastosowaniem własności funkcji trygonometrycznych
- rozwiązuje proste równania trygonometryczne
- rozwiązuje równania trygonometryczne, wyłączając wspólny czynnik poza nawias
- rozwiązuje równania trygonometryczne, które można sprowadzić do równań wielomianowych
- stosuje wzory na sumę i różnicę sinusów i cosinusów
- rozwiązuje nierówności trygonometryczne, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych
- rozwiązuje nierówności trygonometryczne, stosując odpowiednie podstawienia

## 2. GEOMETRIA ANALITYCZNA

Uczeń:

- oblicza odległości między punktami w układzie współrzędnych
- stosuje wzór na odległość między punktami w zadaniach dotyczących wielokątów w układzie współrzędnych
- wyznacza równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od punktu i od prostej
- wyznacza współrzędne środka odcinka, gdy dane są współrzędne jego końców
- wyznacza współrzędne jednego z końców odcinka, gdy dane są współrzędne jego środka i drugiego końca
- stosuje wzór na środek odcinka w zadaniach dotyczących własności wielokątów w układzie współrzędnych
- oblicza odległość punktu od prostej
- oblicza odległość między prostymi równoległymi

- stosuje wzór na odległość punktu od prostej do obliczania pól wielokątów
- podaje równanie okręgu o danych środku i promieniu
- sprawdza, czy punkt należy do danego okręgu
- wyznacza równanie okręgu o danym środku, przechodzącego przez dany punkt
- wyznacza środek i promień okręgu, gdy dane jest jego równanie w postaci kanonicznej lub postaci ogólnej
- sprawdza, czy dane równanie jest równaniem okręgu
- wyznacza wartość parametru tak, aby dane równanie opisywało okrąg
- wyznacza równanie okręgu opisanego na trójkącie
- stosuje w zadaniach równanie okręgu
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów
- podaje liczbę punktów wspólnych dwóch okręgów
- wyznacza równanie okręgu o danym środku, znając jego położenie względem okręgu opisanego podanym równaniem
- rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia okręgów, w tym zadania z parametrem
- podaje liczbę punktów wspólnych i określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu
- wyznacza równanie stycznej do okręgu spełniającej podane warunki
- określa liczbę punktów wspólnych okręgu i prostej w zależności od parametru
- rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia okręgu i prostej
- rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, z których co najmniej jedno jest drugiego stopnia, w tym zadania z parametrem
- stosuje układy równań drugiego stopnia w zadaniach różnych typów
- sprawdza, czy dany punkt należy do danego koła
- opisuje koło w układzie współrzędnych
- podaje geometryczną interpretację rozwiązania układu nierówności drugiego stopnia
- opisuje układem nierówności przedstawiony podzbiór płaszczyzny
- wykonuje działania na wektorach
- sprawdza, czy wektory są równoległe
- wyznacza wartości parametru tak, aby wektory spełniały podany warunek
- stosuje w zadaniach działania na wektorach i ich interpretację geometryczną
- stosuje działania na wektorach do badania współliniowości punktów
- stosuje działania na wektorach do podziału odcinka
- stosuje wektory w zadaniach z geometrii analitycznej
- wykorzystuje działania na wektorach w zadaniach na dowodzenie
- wskazuje figury osiowosymetryczne i podaje liczbę ich osi symetrii
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem osi układu współrzędnych
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem jednej z osi układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków
- wyznacza równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem jednej z osi układu współrzędnych lub prostej o danym równaniu
- stosuje własności symetrii osiowej w zadaniach
- wskazuje figury środkowosymetryczne
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem początku układu współrzędnych
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem początku układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków
- podaje równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem początku układu współrzędnych
- stosuje w zadaniach własności symetrii środkowej

### 3. CIĄGI

Uczeń:

- wyznacza kolejne wyrazy ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów
- wyznacza wyrazy ciągu opisanego słownie
- szkicuje wykres ciągu
- wyznacza wzór ogólny ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów
- wyznacza wskazane wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym
- wyznacza wyrazy ciągu spełniające dany warunek
- wyznacza wzór ogólny ciągu spełniającego podane warunki
- podaje przykłady ciągów monotonicznych, których wyrazy spełniają dane warunki
- uzasadnia, że dany ciąg nie jest monotoniczny, gdy dane są jego kolejne wyrazy albo wzór ogólny
- wyznacza wyraz  $a_{n+1}$  ciągu określonego wzorem ogólnym
- bada monotoniczność ciągu, korzystając z definicji
- wyznacza wartość parametru tak, aby ciąg był ciągiem monotonicznym
- dowodzi monotoniczności ciągów określonych za pomocą innych ciągów monotonicznych; podaje przykłady takich ciągów
- wyznacza początkowe wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie
- wyznacza wzór rekurencyjny ciągu, gdy dany jest wzór ogólny ciągu
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności związane ze wzorem rekurencyjnym ciągu
- wyznacza wzór ogólny ciągu będącego sumą, różnicą, iloczynem lub ilorazem danych ciągów
- bada monotoniczność sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące monotoniczności ciągu
- podaje przykłady ciągów arytmetycznych
- wyznacza wskazane wyrazy ciągu arytmetycznego, gdy dane są jego pierwszy wyraz i różnica
- określa monotoniczność ciągu arytmetycznego
- wyznacza wzór ogólny ciągu arytmetycznego, mając dane dowolne dwa jego wyrazy
- stosuje związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego do wyznaczania wyrazów tego ciągu
- wyznacza wartości niewiadomych tak, aby wraz z podanymi wartościami tworzyły ciąg arytmetyczny
- stosuje w zadaniach własności ciągu arytmetycznego
- udowadnia, że dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym
- udowadnia, że ciąg jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres jest zawarty w pewnej prostej
- stosuje w zadaniach własności ciągu arytmetycznego
- oblicza sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- stosuje w zadaniach tekstowych wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- rozwiązuje równania, stosując wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego
- uzasadnia wzory, stosując wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- bada monotoniczność ciągu, korzystając ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- podaje przykłady ciągów geometrycznych
- wyznacza wyrazy ciągu geometrycznego, gdy dane są jego pierwszy wyraz i iloraz
- wyznacza wzór ogólny ciągu geometrycznego, gdy dane są dowolne dwa jego wyrazy
- wyznacza wartości niewiadomych tak, aby wraz z podanymi wartościami tworzyły ciąg geometryczny
- określa monotoniczność ciągu geometrycznego
- udowadnia, że dany ciąg jest ciągiem geometrycznym
- stosuje w zadaniach związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz średnią geometryczną
- stosuje własności ciągu geometrycznego w zadaniach różnego typu

- oblicza sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
- stosuje wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w zadaniach różnego typu
- stosuje własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego w zadaniach różnego typu, w tym w zadaniach na dowodzenie
- oblicza wysokość kapitału przy różnych okresach kapitalizacji
- oblicza wysokość kapitału na lokacie systematycznego oszczędzania
- oblicza oprocentowanie lokaty
- ustala okres oszczędzania
- rozwiązuje zadania związane z kredytami
- ustala na podstawie wykresu, czy dany ciąg ma granicę, a w przypadku ciągu zbieżnego podaje jego granicę
- ustala, ile wyrazów danego ciągu jest oddalonych od danej liczby o podaną wartość
- uzasadnia, że dany ciąg nie ma granicy
- rozpoznaje ciąg rozbieżny na podstawie wykresu i określa, czy ma on granicę niewłaściwą, czy nie ma granicy
- bada, ile wyrazów danego ciągu jest większych (mniejszych) od danej liczby
- udowadnia rozbieżność ciągu, korzystając z definicji
- oblicza granice ciągów, korzystając z twierdzenia o granicach: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych
- stosuje wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego do obliczania granic ciągów
- oblicza granice ciągów, stosując twierdzenie o trzech ciągach
- oblicza granice niewłaściwe ciągów, korzystając z twierdzenia o własnościach granic ciągów rozbieżnych
- wyznacza granice ciągu w zależności od wartości parametru
- uzasadnia istnienie granicy niewłaściwej
- sprawdza, czy dany szereg geometryczny jest zbieżny
- oblicza sumę szeregu geometrycznego zbieżnego
- zamienia ułamek okresowy na ułamek zwykły, korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego
- stosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego w zadaniach dotyczących własności ciągów
- rozwiązuje równania, stosując wzór na sumę szeregu geometrycznego
- rozwiązuje zadania dotyczące długości krzywych, stosując wzór na sumę szeregu geometrycznego
- zamienia ułamek okresowy na ułamek zwykły

#### 4. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Uczeń:

- uzasadnia, że funkcja nie ma granicy w punkcie, również na podstawie jej wykresu
- uzasadnia, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie, korzystając z definicji
- oblicza granice funkcji w punkcie, korzystając z twierdzenia o granicach: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji, które mają granice w tym punkcie
- oblicza granicę funkcji  $y = \sqrt{f(x)}$  w punkcie
- oblicza granice funkcji w punkcie, stosując własności granic funkcji sinus i cosinus w punkcie
- oblicza granice jednostronne funkcji w punkcie
- stosuje twierdzenie o związku między wartościami granic jednostronnych w punkcie a granicą funkcji w punkcie
- wyznacza granice niewłaściwe jednostronne funkcji w punkcie
- wyznacza granice niewłaściwe funkcji w punkcie
- wyznacza równania asymptot pionowych wykresu funkcji

- wyznacza granice funkcji w nieskończoności
- stosuje różne metody wyznaczania granicy odpowiednio w  $\infty$  i w  $-\infty$
- wyznacza równania asymptot poziomych wykresu funkcji
- udowadnia, że funkcja nie ma granicy w nieskończoności
- sprawdza, czy funkcja jest ciągła w danym punkcie
- bada ciągłość funkcji
- wyznacza wartości parametrów, dla których funkcja jest ciągła w danym punkcie lub przedziale
- stosuje twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich (własność Darboux) do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i wyznaczania jego przybliżonej wartości
- stosuje twierdzenie Weierstrassa do wyznaczania wartości najmniejszej i największej funkcji w danym przedziale domkniętym
- oblicza pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji pochodnej
- stosuje interpretację geometryczną pochodnej funkcji w punkcie do wyznaczania współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji w punkcie
- oblicza miarę kąta, jaki styczna do wykresu funkcji w punkcie tworzy z osią OX
- uzasadnia, że funkcja nie ma pochodnej w punkcie
- korzysta ze wzorów do wyznaczania funkcji pochodnej oraz wartości pochodnej w punkcie
- wyznacza równanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie
- wyznacza współrzędne punktu wykresu funkcji, w którym styczna do niego spełnia podane warunki
- na podstawie definicji pochodnej wyprowadza wzory na pochodne funkcji
- stosuje twierdzenia o pochodnej: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji do wyznaczania funkcji pochodnej oraz wartości pochodnej w punkcie
- stosuje pochodne w zadaniach dotyczących stycznej do wykresu funkcji
- wyznacza pochodne funkcji trygonometrycznych
- wyprowadza wzory na pochodną: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji
- wyznacza wzór funkcji złożonej oraz jej dziedzinę
- wyznacza pochodną funkcji złożonej
- stosuje pochodną funkcji złożonej w zadaniach dotyczących stycznej
- wyznacza pochodną funkcji będącej złożeniem funkcji trygonometrycznych i wielomianów
- stosuje pochodną do wyznaczania prędkości oraz przyspieszenia poruszających się ciał
- korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji
- uzasadnia monotoniczność funkcji w danym zbiorze
- wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja była monotoniczna, stosując twierdzenie o znaku pochodnej
- wykorzystuje znak pochodnej do uzasadniania nierówności trygonometrycznych
- podaje ekstremum funkcji, korzystając z jej wykresu
- wyznacza ekstremum funkcji, stosując warunki konieczny i wystarczający jego istnienia
- wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja miała ekstremum w danym punkcie
- uzasadnia, że dana funkcja nie ma ekstremum
- wyznacza wartości funkcji najmniejszą i największą w przedziale domkniętym
- wyznacza zbiór wartości funkcji, stosując twierdzenie o przyjmowaniu wartości największej i najmniejszej
- wykorzystuje wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w zadaniach z parametrem
- wykorzystuje umiejętność wyznaczania najmniejszej i największej wartości funkcji w zadaniach optymalizacyjnych
- podaje schemat badania własności funkcji
- bada własności funkcji i zapisuje je w tabeli
- szkicuje wykres funkcji na podstawie jej własności

## 5. STATYSTYKA

Uczeń:

- oblicza średnią arytmetyczną zestawu danych
- oblicza średnią arytmetyczną danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób
- wykorzystuje w zadaniach średnią arytmetyczną
- wyznacza medianę i dominantę zestawu danych
- odczytuje informacje ze skali centylowej
- wyznacza medianę i dominantę danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób
- wykorzystuje w zadaniach medianę i dominantę
- oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych
- oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych przedstawionych różnymi sposobami
- oblicza średnią ważoną zestawu liczb z podanymi wagami
- stosuje w zadaniach średnią ważoną